

Zu den Rotationszuständen der Atomkerne

II. Auswirkung der *K*-Beimischung*

Von GERHART LÜDERS¹

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. 12 a, 353—362 [1957]; eingegangen am 15. Februar 1957)

Die in Teil I berechnete Wellenfunktion für den Rotationszustand eines Atomkerns unterscheidet sich von der ursprünglich von BOHR und MOTTELSON angegebenen dadurch, daß die Komponente *K* des Gesamtdrehimpulses in der Figurenachse des verformten Kerns keine gute Quantenzahl ist. Im vorliegenden Teil II wird die Auswirkung dieser *K*-Beimischung auf die Momente des Grundzustandes und auf elektromagnetische Übergänge innerhalb einer Rotationsbande untersucht. Es zeigt sich, daß sich die *K*-Beimischung hierbei praktisch nicht bemerkbar macht; bei dem statischen magnetischen Moment ergibt sich überdies ein Zusammenhang mit einem Resultat, das von BOHR und MOTTELSON nach der Methode von INGLIS gewonnen worden ist.

Im ersten Teil dieser Arbeit² wurde versucht, die Diskrepanz zwischen dem von BOHR und MOTTELSON³ gewonnenen theoretischen Ausdruck für das mechanische Trägheitsmoment von Kernen, die Rotationsbanden zeigen, und den Beobachtungen in Zusammenhang zu bringen mit dem Vorhandensein energetisch benachbarter Besetzungsmöglichkeiten für die einzelnen Nukleonen. Das ursprüngliche physikalische Bild³ wurde beibehalten: nur die äußersten Nukleonen wurden als individuelle Teilchen behandelt, die sich im Sinne des Schalenmodells in einem gemeinsamen Potential bewegen; die Gesamtheit der inneren, abgeschlossene Schalen und Unterschalen bildenden Nukleonen (der Rumpf) wurde jedoch im Sinne des Tröpfchenmodells als inkompressible Flüssigkeit aufgefaßt, die nur wirbelfrei strömen kann; die Wechselwirkung zwischen Rumpf und äußeren Nukleonen erfolgt dadurch, daß die räumliche Gestalt des Potentials durch diejenige des Rumpfes bestimmt ist⁴. Während BOHR und MOTTELSON (B) aus diesem physikalischen Modell als Trägheitsmoment [d. h. die Größe Θ in der empirischen Beziehung (I, 1)] den Wert für wirbelfreie Strömung

erhalten, wurde in I ein allgemeinerer Ansatz für die Wellenfunktion verwendet, der in Übereinstimmung mit der Erfahrung zu einer erheblichen Vergrößerung des Trägheitsmoments führt. Das formale Ergebnis wurde in Teil I nicht quantitativ ausgewertet, da die Gültigkeitsgrenze der bei Bestimmung der Energie (und damit des Trägheitsmoments) verwendeten Störungsrechnung überschritten werden mußte. Das Schwergewicht dieser Arbeit liegt überhaupt nicht auf der numerischen Seite; vielmehr soll qualitativ eine Richtung erkundet werden, in der die Weiterentwicklung des kollektiven Modells gesucht werden könnte.

Beim gegenwärtigen Stand der theoretischen Kernphysik ist man bei der Behandlung schwerer Kerne (praktisch oberhalb des Deuterons) auf Näherungsannahmen bzw. Modellvorstellungen und Modellansätze angewiesen. Bisher ist es nicht möglich, direkt aus den (überdies ja unbekannten) zwischen den Nukleonen wirkenden Kräften auf Eigenschaften der Kerne zu schließen und so etwa Trägheitsmomente zu berechnen⁵. Zwar kann man ein bestimmtes Modell durch ein anderes ersetzen (z. B.

* Zusatz bei Einreichung der Arbeit: Durch die räumliche Entfernung zwischen meinem gegenwärtigen Arbeitsplatz und meinem Heimatinstut hat sich die Einreichung verzögert. Meine Beurteilung des Problems der Trägheitsmomente hat sich inzwischen etwas gewandelt. Trotzdem möchte ich den II. Teil dieser Arbeit im wesentlichen in der Form zum Druck geben wie ich ihn im September 1956 niedergeschrieben habe.

¹ Gegenwärtige Adresse: Department of Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., U.S.A.

² G. LÜDERS, Z. Naturforsch. 11 a, 617 [1956]. Diese Arbeit wird im folgenden durch (Teil) I abgekürzt; Gleichungen aus dieser Arbeit [z. B. Gl. (1)] werden in der Form (I, 1) zitiert.

³ A. BOHR, Dan. Mat. Fys. Medd. 26, Nr. 14 [1952]; im folgenden durch A abgekürzt. A. BOHR u. B. MOTTELSON, Dan. Mat. Fys. Medd. 27, Nr. 16 [1953]; durch B abgekürzt.

⁴ Der HAMILTON-Operator, der diesem physikalischen Bilde entspricht, ist u. a. in Gln. (I, 2) ff. angegeben.

⁵ Die ersten aussichtsreichen Ansätze zur Behandlung quantenmechanischer Vielkörperprobleme (speziell mit Anwendung auf Atomkerne) gehen auf BRUECKNER zurück (K. A. BRUECKNER u. C. A. LEVINSON, Phys. Rev. 97, 1344 [1955]); wegen Weiterentwicklung der Methode siehe insbesondere eine Arbeit von H. A. BETHE (Phys. Rev. 103, 1353 [1956]; dort auch weitere Literaturzitate). Einer Bemerkung von BETHE über die Anwendbarkeit der Methode auf das kollektive Modell möchten wir allerdings nicht zustimmen. Bei dem kollektiven Modell handelt es sich um mehr als nur um die Berechnung von Nukleonenzuständen in einem deformierten Potential; z. B. würde man auch das Trägheitsmoment einer Rotationsbande bestimmen wollen.



das ursprüngliche kollektive Modell (A, B) durch die andersartige Vorstellung von INGLIS⁶); die Glaubwürdigkeit eines bestimmten Modells läßt sich jedoch nicht zwingend belegen⁷. Es erscheint daher gegenwärtig ausgeschlossen, den ganzen Problemkreis der Rotationsbanden überzeugend aufzuklären. Die vorliegende Arbeit ist konservativ in dem Sinne, daß sie das ursprünglich kollektive Modell als mit der empirischen Diskrepanz der Trägheitsmomente qualitativ verträglich erweist; dabei ergeben sich überraschende Zusammenhänge⁸ mit der neueren von INGLIS vorgeschlagenen Methode⁶.

Die an Rotationsbanden experimentell beobachtbaren Größen beschränken sich nicht auf die Lage der Energieniveaus und damit im wesentlichen die Trägheitsmomente. Vielmehr sind auch die statischen Momente des Grundzustandes und Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den einzelnen Niveaus der Beobachtung zugänglich; theoretisch sind sie durch die Wellenfunktionen des Grundzustandes bzw. des Anfangs- und Endzustandes eines Überganges bestimmt. Die mathematische Auswertung des kollektiven Modells, so wie sie in Teil I gegeben wurde, unterscheidet sich von der ursprünglichen (A, B) durch den allgemeineren Ansatz für die Wellenfunktion. Während nämlich BOHR und MOTTELSON annehmen, daß die Komponente K des Gesamtdrehimpulses in Richtung der Achse des verformten Kerns eine gute Quantenzahl ist, ergab sich in I eine erhebliche Beimischung von Zuständen mit benachbarten K -Werten. Im vorliegenden Teil II wird nun untersucht, wie sich diese K -Beimischung in statischen Momenten und Übergangswahrscheinlichkeiten bemerkbar macht und ob damit experimentell für oder gegen das verwendete Modell und seine mathematische Auswertung entschieden werden kann.

Es zeigt sich dabei, daß sich die K -Beimischung an den elektromagnetischen Übergängen innerhalb einer Rotationsbande (im wesentlichen M1 und E2) praktisch nicht erkennen läßt. Berechnet man näm-

lich den Einfluß dieser Beimischungen in der niedrigsten nicht-verschwindenden Näherung, so erweisen sich die von den beteiligten Drehimpulsen abhängigen geometrischen Faktoren als unverändert gegenüber der ursprünglichen Theorie von BOHR und MOTTELSON⁹; allerdings wird ja der Gültigkeitsbereich der Störungsrechnung überschritten, so daß derartige Schlüsse nur beschränkt richtig sind. Auch der Zusammenhang zwischen den Matrixelementen für magnetische Dipol- (M 1) bzw. elektrische Quadrupolübergänge (E 2) und dem statischen magnetischen Dipol- bzw. elektrischen Quadrupolmoment des Grundzustandes bleibt im wesentlichen unverändert erhalten, obwohl diese Momente selbst durch die K -Beimischung beeinflußt werden. Bei dem statischen magnetischen Moment ergibt sich überdies ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen dem hier erhaltenen Resultat und dem, das BOHR und MOTTELSON nach der Methode von INGLIS gewonnen haben¹⁰. Für Übergangswahrscheinlichkeiten ist kein Vergleich möglich; sie lassen sich nach dem Verfahren von INGLIS nicht ermitteln, da die kollektive Rotation des Kerns dort klassisch behandelt wird.

Während sich die K -Beimischung auf Übergänge innerhalb einer Rotationsbande also nicht auswirkt, ist zu erwarten, daß sie eine Rolle spielt bei Übergängen zwischen Niveaus, die verschiedenen Banden gehören (γ -Übergängen zwischen verschiedenen Banden desselben Kerns und β -Übergängen zwischen verschiedenen Kernen). Einerseits sollte sich dann eine stärkere Abweichung der Verhältnisse von Übergangswahrscheinlichkeiten von den einfachen geometrischen Faktoren der ursprünglichen Rechnungen (B, D) zeigen, andererseits ist eine stärkere Durchbrechung des K -Verbots („ K -forbiddenness“) zu erwarten¹¹. Wegen der mannigfaltigen Möglichkeiten für derartige Übergänge wurde dieser Punkt nicht genauer untersucht.

⁶ D. INGLIS, Phys. Rev. **96**, 1059 [1954]; **97**, 701 [1955] und **103**, 1786 [1956]. A. BOHR u. B. MOTTELSON, Dan. Mat. Fys. Medd. **30**, Nr. 1 [1955]; durch C abgekürzt.

⁷ Das dürfte auch für die interessanten Untersuchungen von S. A. MOSZKOWSKI (Phys. Rev. **103**, 1328 [1956]) zur Selbstkonsistenz eines dem INGLISSchen Bilde ähnlichen Modells gelten.

⁸ Siehe Teil I, Abschn. 3, und den Schluß von Abschn. 2 im vorliegenden Teil II.

⁹ Siehe B, Kap. VII, und insbesondere G. ALAGA, K. ALDER, A. BOHR u. B. R. MOTTELSON, Dan. Mat. Fys. Medd. **29**, Nr. 9 [1955] (durch D abgekürzt). Diese Unveränderlich-

keit der geometrischen Faktoren ist von A. K. KERMAN, Dan. Mat. Fys. Medd. **30**, Nr. 15 [1956], in einem etwas anderen Zusammenhang ebenfalls bemerkt worden; KERMAN spricht von einer Renormierung der elektrischen und magnetischen Momente.

¹⁰ Siehe C, Gl. (6); die Gleichung ist als Gl. (14) in der vorliegenden Arbeit mitgeteilt.

¹¹ Die Möglichkeit derartiger Abweichungen und Durchbrechungen wird in D diskutiert; allerdings wird dort angenommen, daß die K -Beimischungen wesentlich kleiner sind als sie sich bei uns ergeben.

1. Statisches magnetisches Dipolmoment

Nach dem kollektiven Modell ist das magnetische Dipolmoment (ausgedrückt in Kernmagnetonen) eines Zustandes, insbesondere des Grundzustandes, gegeben durch

$$\mu = \langle g_P J_z^P + g_N J_z^N + g_R R_z \rangle_{M=I} \quad (1)$$

[vgl. den ähnlichen Ausdruck in B, Gl. (IV.3)]. Hierbei sind g_P bzw. g_N die gyromagnetischen Verhältnisse für Protonen bzw. Neutronen in einem Zustand des jeweiligen j ¹²

$$g = g_l \pm \frac{1}{2l+1} (g_s - g_l) \quad \text{für } j = l \pm \frac{1}{2}, \quad (2)$$

wobei

$$\left. \begin{array}{ll} g_l = 1, & g_s = 5,585 \quad \text{für Protonen,} \\ g_l = 0, & g_s = -3,826 \quad \text{für Neutronen.} \end{array} \right\} \quad (3)$$

Die Größe g_R stellt den g -Faktor des Rumpfes dar; mit BOHR und MOTTELSON (B, Kap. IV) werde gesetzt

$$g_R = Z/A \quad (4)$$

(Z Ordnungszahl, A Massenzahl des Kerns). \vec{J}^P bzw. \vec{J}^N stellen die (durch \hbar geteilten) Gesamtdrehimpulse der individuell behandelten Protonen bzw. Neutronen dar; \vec{R} ist der Drehimpuls der kollektiven Bewegung des Rumpfes; es sind die Komponenten bezüglich der raumfesten z -Richtung zu bilden. Der Erwartungswert in (1) ist zu berechnen für denjenigen Zustand, bei dem die Komponente M des Gesamtdrehimpulses in der z -Richtung den maximal möglichen Wert I hat.

Es ist zweckmäßig, \vec{R} auszudrücken durch den Gesamtdrehimpuls \vec{I} und die individuellen Drehimpulse der beiden Nukleonensorten

$$\vec{R} = \vec{I} - \vec{J} = \vec{I} - \vec{J}^P - \vec{J}^N \quad (5)$$

(vgl. I, Fußnote ³²). Nach bekannten Methoden¹³

$$\begin{aligned} \langle I, K_0 + 1, a | U_1 | I, K_0 \rangle &= - \frac{\hbar^2}{2\Theta} V(I-K_0)(I+K_0+1) \langle K_0 + 1, a | J_1 + iJ_2 | K_0 \rangle, \\ \langle I, K_0 - 1, b | U_1 | I, K_0 \rangle &= - \frac{\hbar^2}{2\Theta} V(I+K_0)(I-K_0+1) \langle K_0 - 1, b | J_1 - iJ_2 | K_0 \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

¹² Den Rechnungen wurde in dieser Arbeit ein vereinfachtes Modell zugrunde gelegt, bei dem die individuell behandelten Protonen jeweils alle gleichen Gesamtdrehimpuls j besitzen und entsprechend die individuell behandelten Neutronen, wobei das j der Protonen mit dem der Neutronen natürlich nicht übereinzustimmen braucht.

wandelt man sodann (1) um in eine Gleichung, bei der eine bestimmte Wahl von M nicht mehr erforderlich ist

$$\mu = \frac{1}{I+1} \{ (g_P - g_R) \langle \vec{I} \cdot \vec{J}^P \rangle + (g_N - g_R) \langle \vec{I} \cdot \vec{J}^N \rangle + g_R I \}. \quad (6)$$

Die Skalarprodukte sind drehinvariant, also z. B.

$$\begin{aligned} \vec{I} \cdot \vec{J}^P &= I_x J_x^P + I_y J_y^P + I_z J_z^P \\ &= I_1 J_1^P + I_2 J_2^P + I_3 J_3^P \end{aligned} \quad (7)$$

(x, y, z = raumfeste Richtungen; 1, 2, 3 = körperfeste Richtungen); der Ausdruck rechts vom zweiten Gleichheitszeichen erlaubt die Auswertung mittels der früher gewonnenen Wellenfunktion, die sich auf körperfeste Richtungen bezog.

Die Wellenfunktion, die sich nach den Rechnungen von Teil I ergibt, wurde dort nicht explizit mitgeteilt. Sie lautet [abgesehen vom β - und γ -abhängigen Anteil, vgl. (I, 10)] in erster störungstheoretischer Näherung

$$\begin{aligned} \Psi_M^I &= \Psi_{M, K_0}^I + \sum_a \Psi_{M, K_0+1, a}^I \frac{\langle I, K_0 + 1, a | U_1 | I, K_0 \rangle}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0+1, a}} \\ &\quad + \sum_b \Psi_{M, K_0-1, b}^I \frac{\langle I, K_0 - 1, b | U_1 | I, K_0 \rangle}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Die Funktionen Ψ_{M, K_0}^I , $\Psi_{M, K_0+1, a}^I$ usw. sind in (I, 17) angegeben; der Index a bzw. b soll verschiedene mögliche Nukleonkonfigurationen zum gleichen Wert von $\Omega = K_0 + 1$ bzw. $\Omega = K_0 - 1$ unterscheiden. Die Energien \tilde{E}_K usw. ergeben sich durch Anwendung von \tilde{H}_0 [Gl. (I, 20)] auf die jeweilige Wellenfunktion. Es ist

$$\langle I, K_0 + 1, a | U_1 | I, K_0 \rangle \equiv \langle \Psi_{M, K_0+1, a}^I | U_1 | \Psi_{M, K_0}^I \rangle \quad (9)$$

mit U_1 nach Gl. (I, 21); da das Matrixelement von M nicht abhängt, wurde M auf der linken Seite fortgelassen. Explizit ist

¹³ Für den Erwartungswert eines beliebigen Vektoroperators A gilt die Identität

$$\langle \vec{A} \rangle = [I(I+1)]^{-1} \langle \vec{I} \rangle \langle \vec{I} \cdot \vec{A} \rangle.$$

Die rechte Seite ergibt sich im wesentlichen aus den drei Forderungen, daß sie wie die linke Seite linear in \vec{A} ist und Vektorcharakter besitzt, und daß das Gleichheitszeichen insbesondere für $\vec{A} = \vec{I}$ richtig ist.

wobei¹⁴

$$\langle K_0 + 1, a | J_1 + i J_2 | K_0 \rangle \equiv \langle \chi_{K_0+1, a} | J_1 + i J_2 | \chi_{K_0} \rangle. \quad (11)$$

Auf der rechten Seite von Gl. (10) tritt ein zusätzlicher Faktor $\sqrt{2}$ auf, wenn für eine der beteiligten Wellenfunktionen $\Omega = K = 0$ und hierbei überdies jedes Nukleonenniveau $\pm \omega$ doppelt besetzt ist. Fälle, bei denen $\Omega = K = 1/2$ ist und die zu Schwierigkeiten in den Energie-Nennern führen können, sollen wie in Teil I auch hier nicht behandelt werden. In Gl. (8) ist der Beitrag von U_0 [Gl. (I, 21)] zur abgeänderten Wellenfunktion fortgelassen worden. Das ist im allgemeinen nicht gerechtfertigt; bei den hier zu lösenden Problemen spielt dieser Beitrag jedoch keine Rolle¹⁵.

Bei der Auswertung von (6) unter Beachtung von (7) sind Ausdrücke der folgenden Gestalt zu bilden

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{M, K_0}^I | I_3 J_3^P | \Psi_{M, K_0}^I \rangle &= K_0 \Omega^P, \\ \langle \Psi_{M, K_0}^I | I_1 J_1^P + I_2 J_2^P | \Psi_{M, K_0-1, b}^I \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{(I+K_0)(I-K_0+1)} \langle K_0 | J_1^P + i J_2^P | K_0 - 1, a \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

[vgl. den ähnlich gebauten Ausdruck (10)], und entsprechend mit Neutronenoperatoren. In der ersten Gleichung ist Ω^P die 3-Komponente des Protonendrehimpulses im Hauptterm Ψ_{M, K_0}^I . Im Grundzustand ist $I = K_0$; Gl. (12) vereinfacht sich damit und man hat keinen Beitrag von den dann nicht existierenden Funktionen mit $K = K_0 + 1$. Als endgültiges Resultat erhält man

$$\begin{aligned} \mu = \frac{I}{I+1} \left\{ g_P \Omega^P + g_N \Omega^N + g_R - \frac{\hbar^2}{\Theta} \left[(g_P - g_R) \sum_b \frac{|\langle K_0 - 1, b | J_1^P - i J_2^P | K_0 \rangle|^2}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b}} \right. \right. \\ \left. \left. + (g_N - g_R) \sum_b \frac{|\langle K_0 - 1, b | J_1^N - i J_2^N | K_0 \rangle|^2}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Der Anteil proportional zu \hbar^2/Θ röhrt her von der K -Beimischung; der übrige Anteil folgt aus der Wellenfunktion Ψ_{M, K_0}^I [vgl. B, Gln. (IV, 9), (IV, 10)]. Bei Ableitung von (10) wurde \vec{J} in Gl. (10) ersetzt durch \vec{J}^P , sofern sich der Zustand $\chi_{K_0-1, b}$ vom Hauptterm durch andere Besetzung eines Protonenniveaus unterscheidet, und durch \vec{J}^N , sofern er sich durch die Besetzung eines Neutronenniveaus unterscheidet.

Das Resultat (13) für das magnetische Moment ist sehr ähnlich zu dem, das BOHR und MOTTELSON in C aus der Wellenfunktion von INGLIS abgeleitet haben. In C, Gl. (6) wird eine Größe g'_R (im Original mit g_R bezeichnet) definiert durch

$$g'_R = \frac{\hbar^2}{\Theta_{\text{eff}}} 2 \operatorname{Re} \sum_i \frac{\langle 0 | \mu_1 | i \rangle \langle i | J_1 | 0 \rangle}{E_i - E_0}, \quad (14)$$

wobei über die Zustände aller Nukleonen zu summieren ist¹⁶. Die Summe werde nun wie bei der Auswertung von Gl. (I, 35) aufgespalten in die An-

teile mit großen und mit kleinen Energienennern. Bei dem Anteil mit großen Nennern spielt das magnetische Eigenmoment der Nukleonen keine wesentliche Rolle (wenigstens wenn die Summation hauptsächlich über abgeschlossene Schalen geht und die Aufspaltung durch Spin – Bahn-Kopplung nicht groß ist); es gilt daher näherungsweise

$$\begin{aligned} (g'_R)'_{\text{große Nenner}} &= \frac{2 \hbar^2}{\Theta_{\text{eff}}} \sum_{\substack{\text{große} \\ \text{Nenner}}} \frac{|\langle i | J_1^P | 0 \rangle|^2}{E_i - E_0} \\ &\approx \frac{Z}{A} \frac{\Theta}{\Theta_{\text{eff}}} = g_R \frac{\Theta}{\Theta_{\text{eff}}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Die letzte Umformung beruht auf folgender Überlegung: Stände in den Matrixelementen J_1 statt J_1^P , so hätte man (bis auf den Faktor Θ_{eff}^{-1}) genau den Beitrag mit großen Energienennern zum effektiven Trägheitsmoment; nach INGLIS ergibt das gerade das hydrodynamische Trägheitsmoment Θ . Statt über alle Nukleonen wird aber nur über die Protonen summiert; das führt näherungsweise zu einem Fak-

¹⁴ Die auftretenden Matrixelemente von $J_1 \pm J_2$ können unter Verwendung von A, Gl. (119) leicht gebildet werden.

¹⁵ Der Operator U_0 läßt in Gl. (8) Funktionen auftreten, die sich vom Hauptterm χ_{K_0} , bei gleichem $\Omega = K_0$, im Zustand jeweils zweier Nukleonen unterscheiden. Die Matrixelemente des magnetischen Moments (Abschn. 2 und 4) zwischen dem Hauptterm und diesen Zuständen verschwin-

den daher; die Matrixelemente des kollektiven Quadrupolmoments (Abschn. 3 und 5) heben sich genau fort gegen diejenigen Beiträge, die von den dann auftretenden zusätzlichen Gliedern auf der rechten Seite von Gl. (23) herrühren.

¹⁶ Vgl. (I, 35) und die dort gegebenen Erläuterungen.

tor Z/A . Der Anteil mit kleinen Energienennern in Gl. (14) bezieht sich im Sinne des verwendeten einfachen Modells¹² auf Protonen- bzw. Neutronenzustände mit jeweils einem bestimmten j ; man erhält¹⁷

$$(g_R')_{\text{kleine Nenner}} = - \frac{2\hbar^2}{\Theta_{\text{eff}}} \left\{ g_P \left(\sum_a \frac{|\langle K_0+1, a | J_1^P | K_0 \rangle|^2}{E_{K_0} - E_{K_0+1, a}} + \sum_b \frac{|\langle K_0-1, b | J_1^P | K_0 \rangle|^2}{E_{K_0} - E_{K_0-1, b}} \right) \right. \\ \left. + g_N \left(\sum_b \frac{|\langle K_0+1, a | J_1^N | K_0 \rangle|^2}{E_{K_0} - E_{K_0+1, a}} + \sum_b \frac{|\langle K_0-1, b | J_1^N | K_0 \rangle|^2}{E_{K_0} - E_{K_0-1, b}} \right) \right\}. \quad (16)$$

Zustände mit $K = K_0 + 1$ treten zwar in Gl. (16) auf, nicht jedoch in Gl. (13). Für den weiteren Vergleich soll die Annahme gemacht werden

$$\sum_a \frac{|\langle K_0+1, a | J_1 | K_0 \rangle|^2}{E_{K_0} - E_{K_0+1, a}} = \sum_b \frac{|\langle K_0-1, b | J_1 | K_0 \rangle|^2}{E_{K_0} - E_{K_0-1, b}} \quad (17)$$

und entsprechend für J_1^P, J_1^N ; diese Annahme, gewöhnlich mit \tilde{E}_K statt E_K , wird an mehreren späteren Stellen verwendet werden. Sie ist meist hinreichend gut erfüllt. Spaltet man nun weiterhin Gl. (16) auf in der Form

$$(g_R')_{\text{große Nenner}} = g_R - g_R \frac{\Theta_{\text{eff}} - \Theta}{\Theta_{\text{eff}}}, \quad (18)$$

drückt $\Theta_{\text{eff}} - \Theta$ durch den Anteil mit kleinen Energienennern in der Formel von INGLIS (I, 35) aus und setzt g_R' ein in den Ausdruck

$$\mu = \frac{I}{I+1} \{ g_P Q^P + g_N Q^N + g_R' \} \quad (19)$$

[vgl. den ersten Teil der rechten Seite von Gl. (13)], so erhält man praktisch die vollständige Gl. (13). Der einzige Unterschied besteht darin, daß in (13) die Größe \hbar^2/Θ , in (19) jedoch $\hbar^2/\Theta_{\text{eff}}$ auftritt; bei dem Vergleich muß jedoch ohnehin $\Theta \approx \Theta_{\text{eff}}$ gesetzt werden (vgl. Fußnote¹⁷). Es ist vielleicht nicht allzu überraschend, daß der kollektive Beitrag zum magnetischen Moment, wie er nach INGLIS folgt, für hochangeregte Rotationszustände mit dem Resultat dieser Arbeit übereinstimmt (das wurde hier nicht explizit gezeigt); die Übereinstimmung auch für den

¹⁷ Es sei daran erinnert, daß \tilde{E}_K die Energie ist, die sich aus (I, 20) ergibt, E_K jedoch allein der zu \vec{T} proportionale Anteil. Wäre der Unterschied zwischen hydrodynamischem und effektivem Trägheitsmoment klein, so würden sich beide Energien nicht wesentlich unterscheiden. Diese Annahme muß beim Vergleich der Resultate dieser Arbeit und der nach INGLIS gewonnenen offenbar stets gemacht werden; siehe auch die kritischen Bemerkungen zur Methode von INGLIS am Schluß von Teil I.

¹⁸ Ist A_μ ($\mu = -2, \dots, +2$) ein Tensoroperator zweiter Stufe im Sinne von G. RACAH (Phys. Rev. 62, 438 [1942]), so gilt

$$\langle A_\mu \rangle = [\frac{2}{3}(2I-1)(I+1)I(2I+3)]^{-1} \cdot \langle T_\mu \rangle \sum_v \langle \Sigma (-1)^v T_{-\nu} A_\nu \rangle,$$

Grundzustand, unter der zusätzlichen Annahme (17), dürfte mehr oder weniger ein mathematischer Zufall sein.

Ein Vergleich des Ergebnisses (13) mit der Erfahrung erscheint nicht sinnvoll. Das zugrunde gelegte physikalische Modell ist in seinen Vereinfachungen von der Wirklichkeit zu weit entfernt. Insbesondere dürfte sich auf die wirklichen magnetischen Momente auch die hier ganz vernachlässigte Beimischung anderer Nukleonenkonfigurationen infolge von Zwei- (oder Mehr-)Körper-Kräften auswirken.

2. Statisches elektrisches Quadrupolmoment

Der kollektive Beitrag (der hier allein berücksichtigt werden soll) zum kollektiven Quadrupolmoment ist gegeben durch

$$Q_s = \frac{3}{\sqrt{5}\pi} Z R_0^2 \langle \alpha_0^* \rangle_{M=1} \quad (20)$$

[B, Gl. (V.3)]; die α_μ ($\mu = -2, \dots, +2$) sind Größen, die den kollektiven Zustand des Rumpfes beschreiben. Zur Auswertung dieses Ausdrucks läßt sich im Prinzip eine Methode anwenden, die der in Abschn. 2 benutzten ganz analog ist¹⁸; da sie wenig geläufig ist, soll jedoch ein anderer, auch bei der Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten gangbarer Weg eingeschlagen werden. Von den kollektiven Parametern α_μ^* im raumfesten System werde

wobei T_μ ein aus dem Drehimpulsoperator \vec{T} gebildeter Tensoroperator ist

$$T_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} [3I_z^2 - I(I+1)], \\ T_{\pm 1} = \mp [(I_x \pm iI_y) I_z + I_z(I_x \pm iI_y)], \\ T_{\pm 2} = (I_x \pm iI_y)^2;$$

zur Begründung siehe Fußnote¹³. Der Ausdruck

$$\sum_v (-1)^v T_{-\nu} A_\nu$$

ist drehinvariant und kann daher statt im raumfesten im körperfesten System ausgewertet werden. — Die Größen α_μ^* und nicht α_μ bilden einen Tensoroperator; vgl. B, Gl. (II, 2).

dabei übergegangen zu denjenigen (α'_{μ}^*) im körperfesten System vermöge¹⁹

$$\alpha_{\mu}^* = \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^2(\vartheta_i) \alpha'_{\nu}^*, \quad (21)$$

wobei die $D_{\mu\nu}^2(\vartheta_i)$ Kreiselfunktionen sind²⁰. Der Erwartungswert bezüglich $\varphi(\beta, \gamma)$ [vgl. (I, 10)] kann sofort gebildet werden²¹ und man erhält

$$\Psi_M^I = \Psi_{M, K_0}^I \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sum_a \frac{|\langle I, K_0+1, a | U_1 | I, K_0 \rangle|^2}{(\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0+1, a})^2} - \frac{1}{2} \sum_b \frac{|\langle I, K_0-1, b | U_1 | I, K_0 \rangle|^2}{(\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b})^2} \right\} + \dots \quad (23)$$

$$\text{Unter Beachtung von }^{22} \langle I, I, K | D_{00}^2(\vartheta_i) | I, I, K \rangle = \frac{3 K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)} \quad (24)$$

erhält man bei Beschränkung auf den Grundzustand ($I = K_0$) schließlich

$$Q_s = \frac{3}{5\pi} Z R_0^2 \beta_1 \frac{I(2I-1)}{(I+1)(2I+3)} \left[1 - 6 \left(\frac{\hbar}{2\Theta} \right)^2 \sum_b \frac{|\langle K_0-1, b | J_1 - i J_2 | K_0 \rangle|^2}{(\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b})^2} \right]. \quad (25)$$

In einem ähnlichen Zusammenhang [Gl. (I, 33)] wurde bereits diskutiert, daß die vorliegende Theorie zu gegebener (aber nicht direkt meßbarer) Verformung β_1 ein kleineres Quadrupolmoment liefert als die Auswertung durch BOHR und MOTTELSON [B, Gln. (V.6), (V.7)], bei der der subtraktive Term fehlt. Diese Tatsache wirkt in der Richtung, daß das zur wahren Verformung gebildete Trägheitsmoment größer ist als das nach den üblichen Methoden aus dem gemessenen Quadrupolmoment erschlossene. Allerdings ist dieser Unterschied meist unbedeutend.

Berechnet man das elektrische Quadrupolmoment für die nach INGLIS gebildete Wellenfunktion, so ergibt sich kein Analogon zu Gl. (25).

3. Magnetische Dipolübergänge innerhalb einer Rotationsbande

Statt der vollständigen Übergangswahrscheinlichkeit soll hier und in Abschn. 4 die jeweilige reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit²³ berechnet werden, die sich schreiben läßt²⁴

¹⁹ Vgl. im wesentlichen A, Gl. (11) und Gl. (58) im Anhang dieser Arbeit.

²⁰ Siehe I, Fußnote¹⁵. Einige wichtige Formeln für das Rechnen mit Kreiselfunktionen sind im Anhang des vorliegenden Teils II zusammengestellt.

²¹ Siehe A, Gl. (12) (das dortige α_{μ} ist mit unserem α'_{μ} identisch) und beachte, daß $\langle \cos \gamma \rangle = 1$, $\langle \sin \gamma \rangle = 0$.

$$Q_s = \frac{3}{5\pi} Z R_0^2 \beta_1 \langle D_{00}^2(\vartheta_i) \rangle_{M=I}. \quad (22)$$

Zur Berechnung dieses Erwartungswertes reicht die Wellenfunktion erster Näherung, wie sie in (8) angegeben ist, nicht aus; vielmehr ist der Koeffizient von Ψ_{M, K_0}^I in zweiter Näherung (aus der Normierungsbedingung) zu ermitteln

$$\Psi_M^I = \Psi_{M, K_0}^I \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sum_a \frac{|\langle I, K_0+1, a | U_1 | I, K_0 \rangle|^2}{(\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0+1, a})^2} - \frac{1}{2} \sum_b \frac{|\langle I, K_0-1, b | U_1 | I, K_0 \rangle|^2}{(\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b})^2} \right\} + \dots \quad (23)$$

$$\text{Unter Beachtung von }^{22} \langle I, I, K | D_{00}^2(\vartheta_i) | I, I, K \rangle = \frac{3 K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)} \quad (24)$$

$$B(L, I_a \rightarrow I_e) = \sum |\langle I_a, M_a | \mathfrak{M}(L, \mu) | I_e, M_e \rangle|^2. \quad (26)$$

Hierbei ist $\mathfrak{M}(L, \mu)$ ein für den Übergang charakteristischer Tensoroperator L . Stufe. Nach RACAH²⁵ können die Matrixelemente auf der rechten Seite durch ein Produkt aus einem reduzierten Matrixelement und einem CLEBSCH – GORDAN-Koeffizienten²⁶ ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} & \langle I_a, M_a | \mathfrak{M}(L, \mu) | I_e, M_e \rangle \\ &= \frac{(-1)^{2L}}{\sqrt{2} I_a + 1} \langle I_a | \mathfrak{M}(L) | I_e \rangle \langle I_e L M_e \mu | I_e L I_a M_a \rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

Wegen der Normierung der CLEBSCH – GORDAN-Koeffizienten folgt damit

$$B(L, I_a \rightarrow I_e) = \frac{1}{2 I_a + 1} |\langle I_a | \mathfrak{M}(L) | I_e \rangle|^2, \quad (28)$$

sofern der Übergang nach dem Vektormodell überhaupt möglich ist, d. h.

$$|I_a - I_e| \leqq L \leqq I_a + I_e. \quad (29)$$

Die Aufgabe der Ermittlung der reduzierten Übergangswahrscheinlichkeit ist damit zurückgeführt auf die der Berechnung des zugehörigen reduzierten Matrixelements.

²² Vgl. Anhang, Gl. (55), und die expliziten CLEBSCH – GORDAN-Koeffizienten im CONDON – SHORTLEY.

²³ B, Gl. (VII, 1) und D, Gl. (9).

²⁴ B, Gl. (VII, 2) und D, Gl. (8).

²⁵ G. RACAH, Phys. Rev. **62**, 438 [1942].

²⁶ Für die CLEBSCH – GORDAN-Koeffizienten soll die Bezeichnungsweise von E. U. CONDON u. G. H. SHORTLEY, The Theory of Atomic Spectra, Cambridge 1935, verwendet werden.

Der Operator für magnetische Dipolübergänge ist gegeben durch²⁷

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(M1, \mu) &= \frac{e\hbar}{2Mc} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \{g_P J_\mu^P + g_N J_\mu^N + g_R R_\mu\} \\ &= \frac{e\hbar}{2Mc} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\cdot \{(g_P - g_R) J_\mu^P + (g_N - g_R) J_\mu^N + g_R I_\mu\}.\end{aligned}\quad (30)$$

M ist die Nukleonenmasse. Die Tensoroperatoren erster Stufe $J_\mu^P, J_\mu^N, R_\mu, I_\mu$ sind definiert durch

$$J_0^P = J_z^P; \quad J_{\pm 1}^P = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (J_x^P \pm i J_y^P) \quad (31)$$

und entsprechend für J^N, R und I . Im folgenden werden ebenfalls die Komponenten im körperfesten System benötigt, die durch einen Strich gekennzeich-

net werden sollen

$$J'_0^P = J_3^P; \quad J'_{\pm 1}^P = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (J_1^P \pm i J_2^P). \quad (32)$$

Der Übergang erfolgt durch die Transformation²⁸

$$\mathfrak{M}(M1, \mu) = \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^1 (\vartheta_i) \mathfrak{M}'(M1, \nu), \quad (33)$$

wobei sich $\mathfrak{M}'(M1, \nu)$ in gleicher Weise durch die körperfesten Operatoren [Gl. (32)] ausdrückt wie $\mathfrak{M}(M1, \mu)$ durch die raumfesten [Gl. (31)].

Mit dem eben definierten Operator ist nunmehr das reduzierte Matrixelement für Wellenfunktionen (8) im Anfangs- und Endzustand (mit dem jeweiligen I_a oder I_e) zu berechnen. Hierfür stellt man das Matrixelement zunächst für beliebige M_a, M_e, μ auf und spaltet dann den entsprechenden CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten ab. Das ist sehr leicht möglich, da das Matrixelement von $D_{\mu\nu}^1 (\vartheta_i)$ [Anh., Gl. (55)]

$$\langle I_a, M_a, K_a | D_{\mu\nu}^1 (\vartheta_i) | I_e, M_e, K_e \rangle = (-1)^{I_e - I_a + \nu} \langle I_a, 1, K_a, -\nu | I_a, 1, I_e, K_e \rangle \langle I_e, 1, M_e, \mu | I_e, 1, I_a, M_a \rangle \quad (34)$$

diesen als Faktor enthält. Somit erhält man²⁹

$$\begin{aligned}(2I_a + 1)^{-\frac{1}{2}} \langle I_a | \mathfrak{M}(M1) | I_e \rangle &= (-1)^{I_e - I_a} \frac{e\hbar}{2Mc} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[(g_P - g_R) \left\{ \langle I_a, 1, K_0, 0 | I_a, 1, I_e, K_0 \rangle \Omega^P \right. \right. \\ &\quad - \langle I_a, 1, K_0, 1 | I_a, 1, I_e, K_0 + 1 \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_a \frac{\langle K_0 | J_1^P - i J_2^P | K_0 + 1, a \rangle \langle I_e, K_0 + 1, a | U_1 | I_e, K_0 \rangle}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0 + 1, a}} \\ &\quad + \langle I_a, 1, K_0 + 1, -1 | I_a, 1, I_e, K_0 \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_a \frac{\langle I_a, K_0 | U_1 | I_a, K_0 + 1, a \rangle \langle K_0 + 1, a | J_1^P + i J_2^P | K_0 \rangle}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0 + 1, a}} \\ &\quad + \langle I_a, 1, K_0, -1 | I_a, 1, I_e, K_0 - 1 \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_b \frac{\langle K_0 | J_1^P + i J_2^P | K_0 - 1, b \rangle \langle I_e, K_0 - 1, b | U_1 | I_e, K_0 \rangle}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0 - 1, b}} \\ &\quad - \langle I_a, 1, K_0 - 1, 1 | I_a, 1, I_e, K_0 \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_b \frac{\langle I_a, K_0 | U_1 | I_a, K_0 - 1, b \rangle \langle K_0 - 1, b | J_1^P - i J_2^P | K_0 \rangle}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0 - 1, b}} \Big\} \\ &\quad \left. + (g_N - g_R) \{ \text{dasselbe mit } \vec{J}^N \text{ statt } \vec{J}^P \} \right].\end{aligned}\quad (35)$$

Der Ausdruck wurde unnötig allgemein angeschrieben; von Interesse ist nur

$$I_a = I + 1; \quad I_e = I. \quad (36)$$

Die Matrixelemente von U_1 sind nunmehr nach Gl. (10) (einschl. der hermitesch-adjungierten Gleichungen) einzusetzen; dabei kann, wie bei Gewinnung von Gl. (13) wieder \vec{J} durch \vec{J}^P bzw. \vec{J}^N ersetzt werden. Es ist nun bemerkenswert, daß sich die I -abhängigen Anteile in den Zusatzgliedern zusammenfassen lassen zu einem Ausdruck, der proportional ist zur I -Abhängigkeit des Hauptterms³²

$$\langle I+1, 1, K_0, 0 | I+1, 1, I, K_0 \rangle = - \sqrt{\frac{(I-K_0+1)(I+K_0+1)}{(I+1)(2I+3)}}; \quad (37)$$

²⁷ Vgl. im wesentlichen B, Gl. (VII, 4) und die ähnlich gebaute Gl. (1) in der vorliegenden Arbeit.

²⁸ Siehe D, Gl. (10) und Gl. (58) im Anhang.

²⁹ Hierbei wurde bereits benutzt, daß die Matrixelemente von I_μ verschwinden für $I_a \neq I_e$.

es gilt nämlich³⁰

$$\begin{aligned} -\langle I+1, 1, K_0, 1 | I+1, 1, I, K_0+1 \rangle & \sqrt{\frac{(I-K_0)(I+K_0+1)}{2}} + \langle I+1, 1, K_0+1, -1 | I+1, 1, I, K_0 \rangle \\ & \cdot \sqrt{\frac{(I-K_0+1)(I+K_0+2)}{2}} = -(K_0+1) \langle I+1, 1, K_0, 0 | I+1, 1, I, K_0 \rangle, \\ \langle I+1, 1, K_0, -1 | I+1, 1, I, K_0-1 \rangle & \sqrt{\frac{(I+K_0)(I-K_0+1)}{2}} - \langle I+1, 1, K_0-1, 1 | I+1, 1, I, K_0 \rangle \\ & \cdot \sqrt{\frac{(I+K_0+1)(I-K_0+2)}{2}} = -(K_0-1) \langle I+1, 1, K_0, 0 | I+1, 1, I, K_0 \rangle. \end{aligned} \quad (38)$$

Somit erhält man schließlich

$$\begin{aligned} (2I+3)^{-1/2} \langle I+1 | \mathfrak{M}(M1) | I \rangle &= -\frac{e\hbar}{2Mc} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \langle I+1, 1, K_0, 0 | I+1, 1, I, K_0 \rangle \left\{ g_P \Omega^P + g_N \Omega^N - g_R \Omega \right. \\ &+ \frac{\hbar^2}{2\Theta} \left[(g_P - g_R) \left((K_0+1) \sum_a \frac{|\langle K_0+1, a | J_1^P + i J_2^P | K_0 \rangle|^2}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0+1, a}} + (K_0-1) \sum_b \frac{|\langle K_0-1, b | J_1^P - i J_2^P | K_0 \rangle|^2}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b}} \right) \right. \\ &\left. \left. + (g_N - g_R) \left((K_0+1) \sum_a \frac{|\langle K_0+1, a | J_1^N + i J_2^N | K_0 \rangle|^2}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0+1, a}} + (K_0-1) \sum_b \frac{|\langle K_0-1, b | J_1^N - i J_2^N | K_0 \rangle|^2}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Hieraus gewinnt man dann $B(M1, I+1 \rightarrow I)$ gemäß Gl. (28).

Der geometrische Faktor, d. h. der die I -Abhängigkeit angebende CLEBSCH – GORDAN-Koeffizient, ist also der gleiche in der ursprünglichen Rechnung von BOHR und MOTTELSON (B, Kap. VII) wie in der vorliegenden Behandlung. Eine Messung des Verhältnisses von Übergangswahrscheinlichkeiten innerhalb einer Rotationsbande kann zwischen den beiden Theorien daher nicht entscheiden³¹. In höherer Näherung treten allerdings Abweichungen auf; da die Störungsrechnung nicht gut gerechtfertigt ist, könnten sich derartige Abweichungen wohl bemerkbar

machen. Auch ein Vergleich der absoluten Größe der Übergangswahrscheinlichkeit mit dem magnetischen Moment des Grundzustandes führt zu keiner Entscheidung. Macht man nämlich wieder die Annahme (17) (mit \tilde{E}_K statt E_K), so geht sowohl das statische magnetische Moment (13) als auch das reduzierte Matrixelement (37)³² aus den einfachen Ausdrücken von BOHR und MOTTELSON (d. h. den Formeln ohne Glieder prop. \hbar^2/Θ) hervor, indem dort g_R ersetzt wird durch³³

$$g_R' = g_R - \frac{\hbar^2}{\Theta} \left[(g_P - g_R) \sum_b \frac{|\langle K_0-1, b | J_1^P - i J_2^P | K_0 \rangle|^2}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b}} + (g_N - g_R) \sum_b \frac{|\langle K_0-1, b | J_1^N - i J_2^N | K_0 \rangle|^2}{\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b}} \right]. \quad (40)$$

Ein Vergleich mit dem Verfahren von INGLIS ist bei der Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten nicht möglich, denn diese sind wegen der klassischen Behandlung der Rotation dort nicht definiert.

4. Elektrische Quadrupolübergänge innerhalb einer Rotationsbande

Bei elektrischen Quadrupolübergängen ist der Operator, der in Gl. (26) für die reduzierte Über-

gangswahrscheinlichkeit einzusetzen ist, gegeben durch

$$\mathfrak{M}(E2, \mu) = \frac{3}{4\pi} Z e R_0^2 \alpha_\mu^* \quad (41)$$

[B, Gl.(VII.5)]; dabei ist, wie in Gl. (20), nur der kollektive Beitrag zum Quadrupolmoment berücksichtigt. Nunmehr gehe man wieder, in Analogie zu Gl. (33), zum körperfesten Koordinatensystem über [siehe auch Gl.(21)]. Der Erwartungswert bezüglich

³² Beachte hierbei, daß $K_0 = \Omega$.

³³ Dieses g_R ist im wesentlichen (d. h. für kleine Abweichungen des effektiven Trägheitsmoments vom hydrodynamischen Wert) identisch mit der durch Gl. (14) definierten Größe.

³⁰ Explizite Ausdrücke für die CLEBSCH – GORDAN-Koeffizienten finden sich im CONDON – SHORTLEY (siehe Fußnote²⁹) auf den Seiten 76 und 77. Hiermit lassen sich Gln. (38) und (47) leicht nachprüfen.

³¹ Für experimentelle Daten siehe etwa D, Tab. II.

$\varphi(\beta, \gamma)$ kann sofort gebildet werden [vgl. Ableitung von Gl. (22)] und man erhält

$$\langle I_a, M_a | \mathcal{M}(\text{E 2}, \mu) | I_e, M_e \rangle = \frac{3}{4\pi} Z e R_0^2 \beta_1 \langle I_a, M_a | D_{\mu 0}^2 (\vartheta_i) | I_e, M_e \rangle . \quad (42)$$

Wegen

$$\langle I_a, M_a, K_a | D_{\mu 0}^2 (\vartheta_i) | I_e, M_e, K_e \rangle = (-1)^{I_e - I_a} \langle I_a, 2, K_a, 0 | I_a, 2, I_e, K_e \rangle \langle I_e, 2, M_e, \mu | I_e, 2, I_a, M_a \rangle \quad (43)$$

[Anh., Gl. (55)] kann das durch Gl. (27) definierte reduzierte Matrixelement leicht angegeben werden; dabei gilt offenbar

$$K_a = K_e . \quad (44)$$

Soll nun der niedrigste nicht-verschwindende Beitrag der K -Beimischung zum Matrixelement berücksichtigt werden, so ist wie bei Berechnung des statischen Quadrupolmoments die Wellenfunktion Ψ in der Gestalt (23) zu verwenden. Man erhält auf diese Weise

$$\begin{aligned} & (2I_a + 1)^{-1/2} \langle I_a \| \mathcal{M}(\text{E 2}) \| I_e \rangle \\ &= (-1)^{I_e - I_a} \frac{3}{4\pi} Z e R_0^2 \beta_1 \left[\langle I_a, 2, K_0, 0 | I_a, 2, I_e, K_0 \rangle \right. \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \sum_a \frac{|\langle I_a, K_0+1, a | U_1 | I_a, K_0 \rangle|^2 + |\langle I_e, K_0+1, a | U_1 | I_e, K_0 \rangle|^2}{(\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0+1, a})^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_b \frac{|\langle I_a, K_0-1, b | U_1 | I_a, K_0 \rangle|^2 + |\langle I_e, K_0-1, b | U_1 | I_e, K_0 \rangle|^2}{(\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b})^2} \right) \\ &\quad + \langle I_a, 2, K_0+1, 0 | I_a, 2, I_e, K_0+1 \rangle \sum_a \frac{|\langle I_a, K_0 | U_1 | I_a, K_0+1, a \rangle \langle I_e, K_0+1, a | U_1 | I_e, K_0 \rangle|}{(\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0+1, a})^2} \\ &\quad + \langle I_a, 2, K_0-1, 0 | I_a, 2, I_e, K_0-1 \rangle \sum_b \frac{|\langle I_a, K_0 | U_1 | I_a, K_0-1, b \rangle \langle I_e, K_0-1, b | U_1 | I_e, K_0 \rangle|}{(\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b})^2} \Big]. \end{aligned} \quad (45)$$

Die Matrixelemente von U_1 sind hier wieder gemäß Gl. (10) durch diejenigen von \vec{J} auszudrücken.

Nunmehr ist Gl. (45) zu spezialisieren für die beiden vorkommenden Fälle. Zunächst werde behandelt

$$I_a = I + 2 ; \quad I_e = I . \quad (46)$$

Man findet³⁰

$$\begin{aligned} & -\langle I+2, 2, K_0, 0 | I+2, 2, I, K_0 \rangle \frac{1}{2} [(I-K_0+2)(I+K_0+3) + (I-K_0)(I+K_0+1)] \\ & + \langle I+2, 2, K_0+1, 0 | I+2, 2, I, K_0+1 \rangle \sqrt{(I-K_0+2)(I+K_0+3)(I-K_0)(I+K_0+1)} \\ & = -\langle I+2, 2, K_0, 0 | I+2, 2, I, K_0 \rangle (3+2K_0), \\ & -\frac{1}{2} \langle I+2, 2, K_0, 0 | I+2, 2, I, K_0 \rangle [(I+K_0+2)(I-K_0+3) + (I+K_0)(I-K_0+1)] \\ & + \langle I+2, 2, K_0-1, 0 | I+2, 2, I, K_0-1 \rangle \sqrt{(I-K_0+2)(I+K_0+3)(I-K_0)(I+K_0+1)} \\ & = -\langle I+2, 2, K_0, 0 | I+2, 2, I, K_0 \rangle (3-2K_0). \end{aligned} \quad (47)$$

Damit gewinnt man schließlich

$$\begin{aligned} & (2I+5)^{-1/2} \langle I+2 \| \mathcal{M}(\text{E 2}) \| I \rangle = \frac{3}{4\pi} Z e R_0^2 \beta_1 \langle I+2, 2, K_0, 0 | I+2, 2, I, K_0 \rangle \\ & \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\hbar^2}{2\Theta} \right)^2 \left[(3+2K_0) \sum_a \frac{|\langle K_0+1, a | J_1+iJ_2 | K_0 \rangle|^2}{(\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0+1, a})^2} + (3-2K_0) \sum_b \frac{|\langle K_0-1, b | J_1-iJ_2 | K_0 \rangle|^2}{(\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b})^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Es tritt also der gleiche geometrische Faktor

$$\langle I+2, 2, K_0, 0 | I+2, 2, I, K_0 \rangle = \sqrt{\frac{3(I-K_0+1)(I+K_0+1)(I-K_0+2)(I+K_0+2)}{2(I+1)(2I+3)(I+2)(2I+5)}} \quad (49)$$

auf wie bei der Auswertung in B [ohne Anteil prop. $(\hbar^2/\Theta)^2$]. Unter der zusätzlichen Annahme (17) (mit \tilde{E}_K statt E_K) ist das Zusatzglied überdies identisch mit dem, das bei dem statischen Quadrupolmoment (25) auftritt.

Entsprechend wird jetzt der Fall ausgewertet. Man erhält

$$I_a = I + 1; \quad I_e = I \quad (50)$$

$$(2I+3)^{-1/2} \langle I+1 \parallel \mathfrak{M}(E2) \parallel I \rangle$$

$$= -\frac{3}{4\pi} Z e R_0^2 \beta_1 \langle I+1, 2, K_0, 0 | I+1, 2, I, K_0 \rangle \left\{ 1 - \left(\frac{\hbar^2}{2\Theta} \right)^2 \frac{1}{K_0} \left[[3K_0 + (2K_0^2 - I^2 - 2I)] \right. \right. \\ \left. \cdot \sum_a \frac{|\langle K_0+1, a | J_1+iJ_2 | K_0 \rangle|^2}{(\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0+1, a})^2} + [3K_0 - (2K_0^2 - I^2 - 2I)] \sum_b \frac{|\langle K_0-1, b | J_1-iJ_2 | K_0 \rangle|^2}{(\tilde{E}_{K_0} - \tilde{E}_{K_0-1, b})^2} \right] \right\} \quad (51)$$

mit

$$\langle I+1, 2, K_0, 0 | I+1, 2, I, K_0 \rangle = -K_0 \sqrt{\frac{3(I-K_0+1)(I+K_0+1)}{I(I+1)(2I+3)(I+2)}}. \quad (52)$$

Die gleiche I -Abhängigkeit wie ohne K -Beimischung tritt hier nur auf, wenn Annahme (17) erfüllt ist. Dann aber ist das Zusatzglied wieder identisch mit dem, das bei dem statischen Quadrupolmoment vorkommt.

Die vorliegenden Formeln gelten für $K_0 \neq 0$ (und $\neq 1/2, 1, 3/2$); der Ausnahmefall von E2-Übergängen innerhalb einer Rotationsbande mit $K_0 = 0$ und einem zugehörigen Nukleonenzustand, der durch paarweise Besetzung aller Nukleonenniveaus $\pm \omega$ entsteht, ist bereits in Gl. (I, 33) (u. U. mit einer Summe statt eines einzelnen Terms) angegeben worden. Der praktisch bedeutungslose Fall, daß $K_0 = 1$ und daß unter den hiermit kombinierenden Zuständen mit $K_0 = 0$ auch einer vom eben genannten Typ

vorkommt, läßt sich ebenfalls leicht behandeln; ein solcher Fall führt allerdings zu Komplikationen bei der Gewinnung des Trägheitsmoments.

Anhang: Das Rechnen mit Kreiselfunktionen

Da es schwierig ist, aus der vorliegenden Literatur die hauptsächlich benötigten Beziehungen für das Rechnen mit Kreiselfunktionen zu entnehmen, seien sie zur Bequemlichkeit des Lesers hier zusammengestellt. Die aufgeführten Beziehungen lassen sich sämtlich ziemlich einfach mit gruppentheoretischen Mitteln beweisen, wenn man die in Teil I, Fußnote ¹⁵, angegebene Beziehung zwischen Kreiselfunktionen und Darstellungsmatrizen der Drehgruppe beachtet. Die so definierten Kreiselfunktionen sind nicht normiert, vielmehr gilt

$$\int [D_{M_1 K_1}^{I_1}(\vartheta_i)]^* D_{M_2 K_2}^{I_2}(\vartheta_i) d(Volumen) = \delta_{I_1 I_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{K_1 K_2} \frac{1}{2 I_1 + 1} \int d(Volumen), \quad (53)$$

wobei das Integrationsvolumen bei üblicher Definition der EULERSchen Winkel gegeben ist durch

$$\int d(Volumen) = 8\pi^2. \quad (54)$$

Der durch Gl. (53) geforderte Normierungsfaktor $\sqrt{(2I+1)/8\pi^2}$ ist bei Angabe von Wellenfunktionen stets fortgelassen, bei Berechnung von Matrixelementen jedoch berücksichtigt worden.

Für Matrixelemente von (nichtnormierten!) Kreiselfunktionen gilt

$$\langle I_1, M_1, K_1 | D_{\mu\nu}^L(\vartheta_i) | I_2, M_2, K_2 \rangle = \sqrt{\frac{2 I_2 + 1}{2 I_1 + 1}} \langle I_2, L, M_2, \mu | I_2, L, I_1, M_1 \rangle \langle I_2, L, K_2, \nu | I_2, L, I_1, K_1 \rangle \\ = (-1)^{I_2 - I_1 + \nu} \langle I_2, L, M_2, \mu | I_2, L, I_1, M_1 \rangle \langle I_1, L, K_1, -\nu | I_1, L, I_2, K_2 \rangle. \quad (55)$$

Die reellen Größen $\langle I_2, L, M_2, \mu | I_2, L, I_1, M_1 \rangle$ usw. sind CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten in der Bezeichnung von CONDON-SHORTLEY ^{26, 30}. Das erste Gleichheitszeichen gilt allgemein, das zweite für die von CONDON-SHORTLEY und vielen anderen Autoren gewählten Phasen der CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten. Die in Gl. (55) stehenden CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten verschwinden nur dann nicht, wenn

$$M_1 = M_2 + \mu \quad \text{bzw.} \quad K_1 = K_2 + \nu \quad (56)$$

und wenn I_1, I_2 und L in einer Dreiecksrelation stehen

$$|I_1 - I_2| \leqq L \leqq I_1 + I_2. \quad (57)$$

Ist T_{Lu} ein Tensoroperator im Sinne von RACAH ²⁵, d. h. ein Satz von Größen, der bei Drehung eines kartesischen Koordinatensystems transformiert wird wie (bei ganzzahligem L) die Kreiselfunktionen $Y_{Lu}(\vartheta, \varphi)$ einer raumfesten Richtung ϑ, φ , so gilt folgende Beziehung zwischen den auf raumfeste Achsen bezogenen Größen T_{Lu} und den auf körperfeste Achsen bezogenen Größen T_{Lv}

$$T_{Lu} = \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^L(\vartheta_i) T'_{Lv} \quad (58)$$

mit unnormierten (!) Kreiselfunktionen [vgl. D, Gl. (10)].